Title	球面内の等質な極小超曲面の第一固有値について(リーマン多様体とリー群)
Author(s)	小谷, 元子
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 576: 48-64
Issue Date	1985-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/99251
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
576巻 1985年 48-64

球面内の等質な極小超曲面の才一固有値について

東京都立大学　小谷　元子
(KOTANI - MOTOKO)

§1 問題

ここでは、$M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ を単位球面内のコンパクト埋没n次元超曲面とする。極小であることの特徴付けとして、次の定理が知られている。

定理(高橋[7])

$X: M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ 上の通り

Mが極小 $\iff$ $\Delta X = -nX$

このことからすぐにコンパクト埋没超曲面のラプラシアンの才一固有値μ_1は次元以下であることがわかる。従って次のような問題を考えることができる。

問題(荻上[ ])

$\mu_1 = n$ となる極小なMはどのようなものか?

(全く独立に Yau も「すべてのコンパクト埋没極小超曲面の第一固有値は n か？」という問題をあげている。[9])

この問題を一般に扱うことは難しく一般の極小超曲面についての最近までの結果では次のものがある。

定理（Choi & Wang [ ]）

$M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ 極小超曲面の第一固有値 $\mu_1 \geq \frac{n}{2}$

そこで，球面内の等質な超曲面が Hsiang と Lawson によって分類されていることに目をつけ武藤，大仁田，浦川は問題を次のように限定した。

問題（武藤，大仁田，浦川）

球面内の等質な極小超曲面の第一固有値は n か？

ここでの目的は [4] における武藤，大仁田，浦川の方法と結果を紹介し，さらにいくつかの計算結果を報告することである。

§2 球面内の等質超曲面のラプラシアン

まずHsiangとLawsonの仕事を復習しておこう。

(G, K)をrank 2のコンパクト型対称対とする。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を対応するCartan分解，$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{p}$内の極大可換部分空間，Gのroot全体のなす空間をΣ，正のroot全体のなす空間をΣ_+と書くと $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$は次のように直和分解できる。

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{k}_\lambda$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{p}_\lambda$$

ここで $\mathfrak{k}_\lambda = \{ X \in \mathfrak{k} \ ; (\mathrm{ad} H)^2 X = -\lambda(H)^2 X \quad \forall H \in \mathfrak{a} \}$

$\mathfrak{p}_\lambda = \{ Y \in \mathfrak{p} \ ; (\mathrm{ad} H)^2 Y = -\lambda(H)^2 Y \quad \forall H \in \mathfrak{a} \}$.

さらに Gのkilling形式B_Gに関する$\mathfrak{k}_\lambda$, $\mathfrak{p}_\lambda$の正規直交基底$\{X_i^\lambda\}$, $\{Y_i^\lambda\}$を次のように取ることができる。

$$\begin{cases} \mathrm{ad}\, H(X_i^\lambda) = -\lambda(H)\, Y_i^\lambda \\ \\ \mathrm{ad}\, H(Y_i^\lambda) = \lambda(H)\, X_i^\lambda . \end{cases}$$

従って $\dim \mathfrak{k}_\lambda = \dim \mathfrak{p}_\lambda$ (これを以後$m(\lambda)$と書く。)

$\mathfrak{a}$ を B_G を内積とする $\dim\mathfrak{a}$ 次元のユークリッド空間と思い，その中の単位球面を $S^{m-1}(1)$ と書くと 勝手な $\mathfrak{a}$ の長さ 1 の正則元（つまり $\lambda(H) \neq 0 \quad {}^{\forall}\lambda \in \Sigma_+$ をみたす）に対して K の随伴作用 $Ad(k)H$ によって，次のような埋め込みが定義できる。

$$\Phi_H : K/L \longrightarrow S^{m-1}(1).$$

ここで $L = \{ k \in K ; \ Ad(k)(H) = H \}$ 又，その Lie 環を $\mathfrak{l} = \{ X \in \mathfrak{k} : \ ad(X)H = 0 \}$ と書く。

$$ad\, X(H) = [X, H]$$

だから $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{m} = \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{k}_\lambda$ とおくと $\mathfrak{k} = \mathfrak{l} + \mathfrak{m}$ は $Ad(L)$-不変な分解を与え，$\mathfrak{m}$ には

$$g_H(X, Y) = B_G([X, H], [Y, H]) \qquad {}^{\forall} X, Y \in \mathfrak{m},$$

によって内積が入いる。これを左不変に K/L に拡張したものを g とする。

$$T_H(\Phi_H(K/L)) = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} \mathfrak{g}_\lambda$$

だから $\dim T_H(\Phi_H(K/L)) = \dim(\sum_{\lambda\in\Sigma_+}\mathfrak{g}_\lambda) = \dim\mathfrak{p} - 2$,
なので $\Phi_H : (K/L, g) \longrightarrow S^{m-1}(1)$ は単位球面内の等質超曲面である。

逆に単位球面内の等質超曲面はこのようなものに限ることが，Hsiang と Lawson によって示されている。（これらを正則R空間と呼ぶ）

正則R空間の主曲率は，高木－高橋によって研究されている。（［6］）

定理（高木，高橋）

$\Phi_H(K/L) \hookrightarrow S^{m-1}(1)$ は等径超曲面（つまり主曲率が M 上一定）で，その主曲率 k_i，重複度 m_i は次のように与えられる。$\Sigma_+^* = \{\lambda\in\Sigma_+ ; \frac{\lambda}{2}\in\Sigma_+\} = \{\lambda_1 < \cdots < \lambda_r\}$ とする。又 Z を H に直交する $\mathfrak{a}$ の長さ 1 の元とする。（$\mathfrak{a}$ の次元は 2 次元に注意）

$$k_i = -\frac{\lambda_i(Z)}{\lambda_i(H)}, \qquad m_i = m(\lambda) + m(2\lambda),$$

従って $\sum_{i=1}^r m_i k_i(H) = 0$ となる H を選んでくると，その H

に関する埋め込み $\Phi_H(K/L) \hookrightarrow S^{m+1}(1)$ によって単位球面内の等質極小超曲面がつくされることがわかる。

このようにして得た $(K/L, g)$ のラプラシアンの第一固有値を調べることが目的である。今 $\{X_i^\lambda/\lambda(H) ; \lambda\in\Sigma_+, i=1,\dots,m(\lambda)\}$ が $\mathfrak{m}$ の g_H に関する正規直交基底になり左不変計量 g に関する K/L のラプラシアンは Lie 微分 L を使って

$$\Delta = \sum_{\lambda\in\Sigma_T}\sum_{i=1}^{m(\lambda)} \frac{(L X_i^\lambda)^2}{\lambda^2(H)},$$

と表わされる。

注意1. 球面内の等径超曲面については Münzner によって次のことが知られている。([3], [2])

相異なる主曲率を $\cot\theta_1, \dots, \cot\theta_r$ ($0<\theta_1<\cdots<\theta_r$) その重複度を $m_1, \dots, m_d$ とすると。

$$r = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$\theta_i = \theta_1 + \frac{i-1}{d}\pi$$

$$m_1 = m_3 = \cdots, \quad m_2 = m_4 = \cdots$$

注意2. 球面内の等径超曲面の最小固有値については等質でないものについても武藤が計算している。

§3 固有値計算の方法

Lie群 K の有限次元ユニタリ表現の同値類 (ρ, V^ρ) のなす空間を $D(K)$, $V^\rho_L = \{ v \in V^\rho ; \rho(l) v = v \quad \forall l \in L \}$ が空でないような $D(K)$ の表現のなす空間を $D(K, L) = \{ (\rho, V^\rho) \in D(K) ; V^\rho_L \neq \{0\} \}$ とする。

$V^\rho_L \subset V^\rho$ だから V^ρ の正規直交基底 $\{ v_i \}_{i=1}^{\dim V^\rho}$ を $\{ v_i \}_{i=1}^{\dim V^\rho_L}$ が V^ρ_L の正規直交基底となるように取ると K/L 上の複素数値 C^∞ 関数全体の空間 $C^\infty_{\mathbb{C}}(K/L)$ の完全正規直交基底として $\{ \rho_{ij}(\ ) = ((\rho(\ ) v_i, v_j)) \quad i = 1, \cdots, \dim V^\rho_L, \quad j = 1, \cdots, \dim V^\rho,$ $\rho \in D(K, L) \}$ がとれる。(Peter Weyl)

$$\rho(\Delta) = \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \sum_{i=1}^{m(\lambda)} \frac{\rho(X_i^\lambda)^2}{\lambda(H)^2}$$

とおくと $\Delta \rho_{ij} = ((\rho(\Delta) v_i, v_j))$ であるから Δ の固有値を求めることは すべての $D(K, L)$ の元 ρ に対して 有限次元作用素 $\rho(\Delta)$ の固有値を求めることと同値である。もし g が両側不変な計量ならば Schur の補題より $\rho(\Delta)$ はスカラー作用素となり その固有値も具体的に求められている。

（現代の球函数 岩波 参照）

我々の場合は計量は左不変でしかないので そのすべての固有値を知ることは 原理的には可能であるが 実際にはむずかしい，従って次のような工夫をする。

$$\rho(\Delta) = \Sigma \frac{\rho(X_i^\lambda)^2}{c} + P$$

$$c = \max_\lambda \{\lambda(H)^2\}$$

と書き直すと Pは $\Sigma\rho(X_i^\lambda)^2$ と可換な正値作用素である。

一方Kの両側不変な計量 B_Kは Gの両側不変な計量B_GをKに制限したものの定数倍になっているから $B_K = aB_G|_K$と書ける。Kの両側不変計量に関するラプラシアンは 前と同じ基底 $\{X_i^\lambda\}$ を使って

$$\Omega = \Sigma \frac{(L_{X_i^\lambda})^2}{B_K(X_i^\lambda, X_i^\lambda)} = \frac{1}{a}\Sigma(L_{X_i^\lambda})^2$$

と書ける。このことに注意すると $\rho(\Delta)$はさらに

$$\rho(\Delta) = \frac{a}{c}\rho(\Omega) + P$$

という形に書き直せる。前にも注意したように $\rho(\Omega)$ の固有値 $g(\Lambda_\rho)$ は Freudenthal の公式によって求められ P が $\rho(\Omega)$ と可換な正値作用素であることから $\rho(\Delta)$ の固有値は $a\,g(\Lambda_\rho)/c$ 以上になっている。高橋の定理からすでに最小固有値は n 以下であることが保証されており、問題としているのは n 以下の固有値があるかどうかということであるから $a\,g(\Lambda_\rho)/c \leq n$ となっている ρ についてのみさらに詳しく調べればよいことがわかる。

§4　具体的な計算

$K/L \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ は等径超曲面でその相異なる主曲率の個数 $d = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ である。

i)　$d = 1$　　K/L は $S^n(1) \hookrightarrow S^{n+1}(1)$　最小固有値は n

ii)　$d = 2$　　K/L は Clifford torus　最小固有値は n.

iii)　$d = 3$　　K/L を 尾関・竹内〔5〕に従って次のように実現しよう。

$\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 実四元数環 $\mathbb{H}$, 実 Cayley 数 $\mathbb{K}$ とする。

$H_3(\mathbb{F}) = \{ \mathfrak{U} ; \mathfrak{U}$ は $\mathbb{F}$ 係数の 3×3 行列 $\mathfrak{U}^* = \mathfrak{U} \}$

$SH_3(\mathbb{F}) = \{ u \in H_3(\mathbb{F}) \ ; \ T(u) = 0 \}$

ここで $T(u) = \begin{cases} \mathrm{tr}\, u + \mathrm{tr}\, \bar{u} & \mathbb{F} = \mathbb{H} \\ \mathrm{tr}\, u & \text{その他の場合.} \end{cases}$

又 $R(u)v = \dfrac{uv + vu}{2}$, $D(u)v = \dfrac{uv - vu}{2}$ とおくと $R ; H_3(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(H_3(\mathbb{F}))$. $D ; SH_3(H) \longrightarrow \mathfrak{gl}(H_3(\mathbb{F}))$ は単射連続な写像になっている。これによって $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{gl}(H_3(\mathbb{F}))$ の部分空間として

$$\mathfrak{p} = R(\{ u \in H_3(\mathbb{F}) \quad \mathrm{tr}\, u = 0 \})$$

$$\mathfrak{k} = D(SH_3(\mathbb{F}))$$

で実現されている。 $\dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{k} = 3\dim \mathbb{F} + 2$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とおくと $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan分解とするコンパクト型単純 Lie 環になっており、これらによって $d = 3$ になるような rank 2 の Lie 環はすべてつくされている。具体的には次の表のようになる。

table 1

$\mathbb{F}$	K	L	G	$\dim(K/L)$
$\mathbb{R}$	$SO(3)=B_1$	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	$SU(3)$	3
$\mathbb{C}$	$SU(3)=A_2$	T^2	$SU(3)\times SU(3)$	6
$\mathbb{H}$	$Sp(3)=C_3$	$Sp(1)^3$	$SU(6)$	12
$\mathbb{K}$	F_4	$Spin(8)$	E_6	24

さらに $e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
とおくと 極大可換空間 $\mathfrak{a}=\{\sum \xi_i e_i\ ;\ \sum \xi_i=0\}\subset\mathfrak{p}$ が
とれ

$$\Sigma_+^*=\left\{\frac{\xi_2-\xi_1}{2},\ \frac{\xi_3-\xi_1}{2},\ \frac{\xi_3-\xi_2}{2}\right\}$$

つまり $\lambda_1=\dfrac{\xi_2-\xi_1}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{\xi_3-\xi_1}{2}$, $\lambda_3=\dfrac{\xi_3-\xi_2}{2}$, $m_1=m_2=m_3$
$=\dim\mathbb{F}$ を得る。

次に $H=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=\dim\mathbb{F}/3$ が極小曲面を与えるための条件を求めよう。 $Z=\left(\dfrac{\xi_2-\xi_3}{\sqrt3},\ \dfrac{\xi_3-\xi_1}{\sqrt3},\ \dfrac{\xi_1-\xi_2}{\sqrt3}\right)$ とおくと

$B(H,H)=B(Z,Z)=1$, $B(H,Z)=0$ を満たす。

K/L の主曲率は

$$k_1(H) = -\frac{\lambda_1(Z)}{\lambda_1(H)} = \frac{\xi_1+\xi_2-2\xi_3}{\sqrt{3}(\xi_2-\xi_1)},$$

$$k_2(H) = -\frac{\lambda_2(Z)}{\lambda_2(H)} = \frac{2\xi_2-\xi_1-\xi_3}{\sqrt{3}(\xi_3-\xi_1)},$$

$$k_3(H) = -\frac{\lambda_3(Z)}{\lambda_3(H)} = \frac{\xi_3+\xi_2-2\xi_1}{\sqrt{3}(\xi_3-\xi_2)},$$

となる。従って K/L が極小になる Hの値は

$H = \left(-\frac{1}{\sqrt{3\dim \mathbb{F}}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{3\dim \mathbb{F}}}\right)$ で $k_1 = -\sqrt{3}$, $k_2 = 0$, $k_3 = \sqrt{3}$, $\lambda_1(H)^2 = \dim \mathbb{F}/12$, $\lambda_2(H)^2 = \dim \mathbb{F}/3$, $\lambda_3(H)^2 = \dim \mathbb{F}/12$

となり §3 で定義された $c = \max_\lambda \lambda^2(H) = \dim \mathbb{F}/3$ である。

$\mathbb{F} = \mathbb{H}$ の時を例にとると $c = 1/12$, $a = 2/3$ $mc/a = 24/16$

各 $\rho \in D(k)$ は表現のウェイトを通じて $(m_1, m_2, \cdots) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{rank}\, K}$ と1対1に対応しており、$\varepsilon(\Lambda_\rho)$ はこの$\{m_i\}$によって次のように与えられる([8])

$$\varepsilon(\Lambda_\rho) = (m_1 k_1 + m_2 k_2 + 2m_3 k_3 + 2k_1 + 2k_2 + 4k_3)/16$$

table 2

m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3	$18g(\Lambda)$	≤ 24?	$D(K,L)$?
1	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	7		*
2	0	0	2	2	1	16		*
3	0	0	3	3	$\frac{3}{2}$	27	*	
0	1	0	1	2	1	12		
0	2	0	2	4	2	28	*	
0	0	1	1	2	$\frac{3}{2}$	15		*
0	0	2	2	4	3	36	*	
1	1	0	2	3	$\frac{3}{2}$	21		*
2	1	0	3	4	2	32	*	
1	0	1	2	3	2	24	*	
0	1	1	2	4	$\frac{5}{2}$	31	*	

ここで 4列目の * は $g(\Lambda_\rho)$ が $24/16$ より大きくなっていることを 5列目の * は $\rho \notin D(K,L)$ となるものにつけてある。 * がどちらにもついていないものが次元より小さい固有値を与える可能性があるもので、この場合には上から4行目の ~~随伴行列~~ 随伴作用 $V^\rho=\mathfrak{g}$, $V^\rho_L=\mathfrak{a}$ となるもののみが候補として残っている。

$\mathbb{F} = \mathbb{K}$ の場合は次のようになる。

table 3

m_1	m_2	m_3	m_4	p_1	p_2	p_3	p_4	$18\,\delta(\Lambda_\rho)$	≤24?	D(k.L)?
1	0	0	0	2	3	4	2	18		*
2	0	0	0	4	6	8	2	38	*	
0	1	0	0	3	6	8	4	36	*	
0	0	1	0	2	4	6	3	24	*	
0	0	0	1	1	2	3	2	12		
0	0	0	2	2	4	6	4	26	*	
1	0	0	1	3	5	?	4	32	*	

5行目は 随伴作用素 $V^\rho = \mathfrak{g}$ $V^\rho_L = \mathfrak{a}$ である。

随伴行列については

$$\rho(\Delta) = \sum_{j=1.2.3} \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{g}/L)/3} \frac{Ad(X^{\lambda_j}_i)^2}{\lambda_j(H)^2}$$

$$\frac{Ad(X_\lambda)^2}{\lambda(H)^2} H = \frac{\lambda(H)\,Ad(X_\lambda)\,Y_\lambda}{\lambda(H)^2} = -\frac{H_\lambda}{\lambda(H)}$$

$$\frac{Ad(X_\lambda)^2}{\lambda(H)^2} Z = \frac{\lambda(Z)\,Ad(X_\lambda)\,Y_\lambda}{\lambda(H)^2} = \frac{-\lambda(Z)}{\lambda(H)} \; \frac{H_\lambda}{\lambda(H)}$$

ここで $H_\lambda = \lambda(H)H + \lambda(Z)Z$
だから

$$Ad(\Delta)H = -\frac{\dim(K/L)}{3}\{3H - (\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2+\mathfrak{k}_3)Z\} = -\dim(K/L)H$$

$$Ad(\Delta)Z = -\frac{\dim(K/L)}{3}\{-(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2+\mathfrak{k}_3)H + (\mathfrak{k}_1^2+\mathfrak{k}_2^2+\mathfrak{k}_3^2)Z\} = -2\dim(K/L)$$

で 固有値は $\{\dim(K/L),\ 2\dim(K/L)\}$ だからラプラシアンのオ一固有値は次元と一致することが確められる。

$\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合は 武藤, 大仁田, 浦川が [4] で計算し 最小固有値が次元と一致することが確められている。従って $d = 3$ の場合は $\mu_1 = n$ がわかった。

iii) $d = 6$

1) $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_2$ $\mathfrak{p} = \sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_2$ の場合は 武藤, 大仁田, 浦川 [4]

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$ $\mathfrak{k} = su(2) + su(2)$ $l = 0$ の場合は 小谷 [10]

によって同様の方法で $\mu_1 = n$ が確められている。

iv) $d = 4$

多くの場合は　この方法では計算しきれない。

参考文献

[1] Hsiang and Lawson, Minimal submanifolds of low cohomogeneity, J. Diff. Geom. 5 (1971)

[2] Münzner, Isoparametrische Hyperflächen I Math. Ann. 251 (1980),

[3] Münzner, Isoparametrische Hyperflächen II Math. Ann. 256 (1981)

[4] Muto, Ohnita and Urakawa ~~Homogeneous~~ minimal hypersurfaces in the unit sphere and the first eigenvalue of their Laplacian, Tohoku Math. J. 36 (1984)

[5] Ozeki and Takeuchi On some type of hypersurfaces in spheres II. Tohoku Math J 28 (1976)

[6] Takagi and Takahashi On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a unit sphere, Diff Geom, in honor of Yano, Kinokuniya (1972)

[7] Takahashi Minimal immersions of Rieman manifolds

J. Math. Soc. Japan 18 (1966).

[8] Yamaguchi, Spectra of flag manifolds, Memoria Fac. Sci Kyushu Univ 33 (1979)

[9] Yau, Problem section, Seminar on differential geometry Ann. Math. Studies 102 Princeton Univ Press 1982

[10] Kotani The first eigenvalue of homogeneous minimal hypersurfaces in a unit sphere $S^{n+1}(1)$ Tohoku Math J 37 (1985).